

Proiect de lecție: Mulțimi de numere (clasa a 9-a)

Autor: Ariana-Stanca Văcărețu, Colegiul Național Emil Racoviță Cluj-Napoca

COMPETENȚELE VIZATE

Disciplina: Matematică

- Identificarea în limbaj cotidian sau în probleme a unor noțiuni specifice teoriei mulțimilor
- Reprezentarea adecvată a mulțimilor și identificarea de proprietăți

Literație disciplinară

- Citire cu înțelegere

Învățare socio-emoțională

- Abilitatea de a înțelege perspectivele și de a empatiza cu ceilalți, inclusiv cu cei din medii, culturi și contexte diferite – Conștientizare socială

MOTIVAȚIA

Lecția se dorește a fi mai degrabă o lecție de recapitulare, cu scopul de a ne asigura că, la începutul clasei a IX-a, elevii au o înțelegere profundă a mulțimilor de numere. Elevii au învățat mulțimile de numere în gimnaziu (mulțimile numerelor naturale, întregi și raționale – în clasa a VI-a, mulțimea numerelor reale – în clasa a VII-a).

Fiind prima lecție de algebră din clasa a IX-a, lecția își propune să provoace elevii să exploreze *rostul matematicii* abordând din perspectivă istorică (și culturală) descoperirea numerelor de diferite tipuri și necesitățile oamenilor la care descoperirea acestor numere a răspuns. Numerele sunt privite ca obiect matematic și procesul descoperirii lor oferă elevilor posibilitatea de a înțelege atât nevoia omului de abstractizare, cât și faptul că matematica este mai degrabă despre *de ce* decât despre *cum*.

Lecția, prin conținutul ei, este punctul de pornire în studiul unității de învățare *Mulțimi*; în lecțiile următoare, elevii vor repeta și completa cele învățate în gimnaziu despre mulțimile de numere:

- a) caracteristici ale numerelor („măsura”/ modulul numerelor, partea întregă și fracționară a unui număr);
- b) relații și operații între numere;
- c) relații și operații între submulțimi ale mulțimilor de numere (intervale).

Lecția solicită elevilor să citească atent un text de două pagini A4 folosind o strategie de lectură. Este o ocazie pentru ei de a învăța o metodă de monitorizare a propriei înțelegeri a informațiilor dintr-un text pe care, mai apoi, o pot utiliza în procesul de învățare la orice disciplină.

OBIECTIVE DE ÎNVĂȚARE

La finalul lecției, elevii vor fi capabili:

- Să identifice mulțimile de numere;
- Să definească mulțimile de numere;
- Să asocieze unui număr mulțimile de numere din care acesta face parte;
- Să descrie ordinea cronologică în care au apărut mulțimile de numere naturale, întregi, raționale, reale;
- Să descrie relațiile dintre mulțimile de numere naturale, întregi, raționale, reale;
- Să explice necesitatea introducerii diferitelor tipuri de numere;
- Să-și monitorizeze înțelegerea informațiilor dintr-un text;
- Să explice o emoție (tristețea) luând în considerare perspective din alte medii, culturi și contexte.

CONDIȚII PRELABILE

Elevii trebuie să aibă acces la internet (acasă) și să folosească motoare de căutare pentru a identifica surse relevante despre un anumit subiect.

EVALUARE

Pe parcursul lecției voi observa nivelul implicării elevilor; voi acorda o atenție specială observării activității elevilor pe parcursul utilizării strategiei de lectură SINELG pentru a mă asigura că elevii citesc textul atent, înțeleg ideile din text și își monitorizează propria înțelegere a informațiilor din text.

Evaluarea învățării conținutului nou o voi realiza prin întrebări orale/ sarcini de lucru simple pe parcursul discuțiilor din cadrul lecției. Întrebările/ sarcinile de lucru ar putea fi:

- În ce perioadă de timp s-a dezvoltat conceptul de număr?
- Numiți mulțimile de numere pe care le cunoașteți și dați 3 exemple de numere din fiecare mulțime.
- Reprezentați prin desen ordinea cronologică în care au apărut mulțimile de numere pe care le cunoașteți. Explicați necesitatea introducerii diferitelor tipuri de numere.
- Reprezentați prin desen relația dintre mulțimile de numere pe care le cunoașteți.

Evaluarea învățării socio-emoționale se va realiza prin analiza explicațiilor oferite de elevi în etapa de reflecție/ extindere. Analiza explicațiilor va avea în vedere următoarele criterii:

- existența unei idei care explică tristețea grecilor antici;
- existența unei idei care face referire la povestea lui Hippasos/ Școala lui Pitagora – valori/ credințe;
- explicația conține cel puțin o idee care descrie sentimente specifice stării de tristețe (sentiment de dezavantaj, pierdere, neajutorare etc.).

RESURSELE ȘI MANAGEMENTUL TIMPULUI

Caiet, creion/ tablă, cretă/ whiteboard, conexiune la internet, videoproiector – pentru notarea ideilor de către profesor/ elevi

Copii ale fragmentului din cartea Numerele naturii – Ireală realitate a imaginației matematicii de Ian Stewart (vezi Anexa 1) – fiecare elev primește un exemplar

Copii ale instrucțiunilor de lucru pentru elevi – metoda SINELG (vezi Anexa 2) – fiecare elev primește un exemplar

Resurse procedurale:

- Discuția structurată
- SINELG
- Eseul de 5 minute

Managementul timpului: 100 minute (evocare: 20'; realizarea sensului: 60'; reflecția: 15'; Feedback: 5').

Timp total: 100 minute

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

Evocare

Discuție structurată despre mulțimi de numere organizată, în principal, frontal; pentru a ne asigura că focalizăm gândirea elevilor spre tema lecției, putem solicita elevilor să discute cu un coleg răspunsul la anumite întrebări.

Întrebarea de pornire a discuției structurate: *Ați învățat despre numere naturale, întregi, raționale, iraționale și reale. Numărul 5 este atât un număr natural, cât și un număr întreg, rațional și real. Gândiți-vă timp de 1 minut și apoi spuneți unui coleg/ unei colege din proximitate care credeți că a fost ordinea cronologică în care oamenii au introdus diferitele tipuri de numere.*

Sunt colectate răspunsurile de la elevi și apoi discuția continuă; în cadrul discuției se vor cere elevilor justificări (de ex.: De ce considerați că primele numere apărute sunt numerele naturale?), descrieri ale mulțimilor de numere (de ex.: Ce fel de numere conține mulțimea numerelor iraționale?).

Sunt notate pe tablă/ whiteboard ideile elevilor.

Realizarea sensului

SINELG (Sistem Interactiv de Notare pentru Eficientizarea Lecturii și Gândirii) – elevii citesc textul selectat din cartea Numerele naturii – Ireală realitate a imaginației matematice de Ian Stewart folosind metoda SINELG. În text se vorbește despre apariția diferitelor tipuri de numere. După citirea textului, elevii vor verifica dacă răspunsurile lor din cadrul discuției structurate coincid sau diferă de ideile prezentate în text. Pentru că metoda nu a mai fost utilizată, la începutul activității trebuie explicat elevilor ce au de făcut (în acest scop fiecare elev primește un exemplar al anexei 2).

Fiecare elev primește un exemplar al anexei 1 și încep lectura textului folosind metoda SINELG.

Activitatea elevilor este observată. Dacă elevii au înțeles ce au de făcut, sunt lăsați să-și continue activitatea. Dacă se observă că vreunul dintre elevi nu a înțeles ce are de făcut, i se oferă sprijin. Dacă se observă că mai mulți elevi nu au înțeles ce au de făcut, se întrerupe activitatea elevilor și se exemplifică metoda pentru primul paragraf al textului. Apoi, elevii reiau citirea textului cu ajutorul metodei SINELG. Toți elevii termină de citit textul cu ajutorul metodei SINELG.

Elevii care termină mai repede de citit și notat pe margine textul, scriu în caiete tabelul din anexa 2 și îl completează.

După ce toți elevii au finalizat lectura textului, este facilitată o discuție despre paragrafele pe care elevii le-au marcat cu – sau ?. Este încurajată identificarea de răspunsuri în text (cu citirea atentă a paragrafului care oferă răspunsul/ răspunsurile) dar, dacă textul nu conține răspunsul/ răspunsurile căutate, sunt încurajați ceilalți elevi să răspundă (dacă știu) sau sunt încurajați toți elevii să caute informații pe internet și să împărtășească posibile răspunsuri la începutul orei viitoare.

Este comparată validitatea ideilor notate pe tablă/ whiteboard în etapa de evocare cu informațiile oferite de text.

La finalul discuției, li se va cere elevilor să:

- reprezinte prin desen ordinea cronologică în care au apărut mulțimile de numere naturale, întregi, raționale, iraționale, reale și să explice necesitatea introducerii diferitelor tipuri de numere. Explicațiile se pot folosi de paragrafe din text.
- reprezinte prin desen relația dintre mulțimile de numere naturale, întregi, raționale, iraționale, reale.

Reflecție

Eseul de 5 minute

Sarcina de lucru: Explicați de ce descoperirea faptului că radicalul din 2 nu poate fi reprezentat printr-o fracție a produs o mare tristețe grecilor antici. Paragraful din text este: „Grecii antici, de pildă, au descoperit, spre marea lor tristețe, că radicalul din 2 nu poate fi reprezentat exact printr-o fracție.”

EXTINDERE

Temă de casă

Sarcina de lucru:

Căutați informații relevante despre povestea lui Hippasos și apoi revizuiți eseul de 5 minute pe care l-ați scris în clasă, utilizând în formularea explicației informațiile găsite.

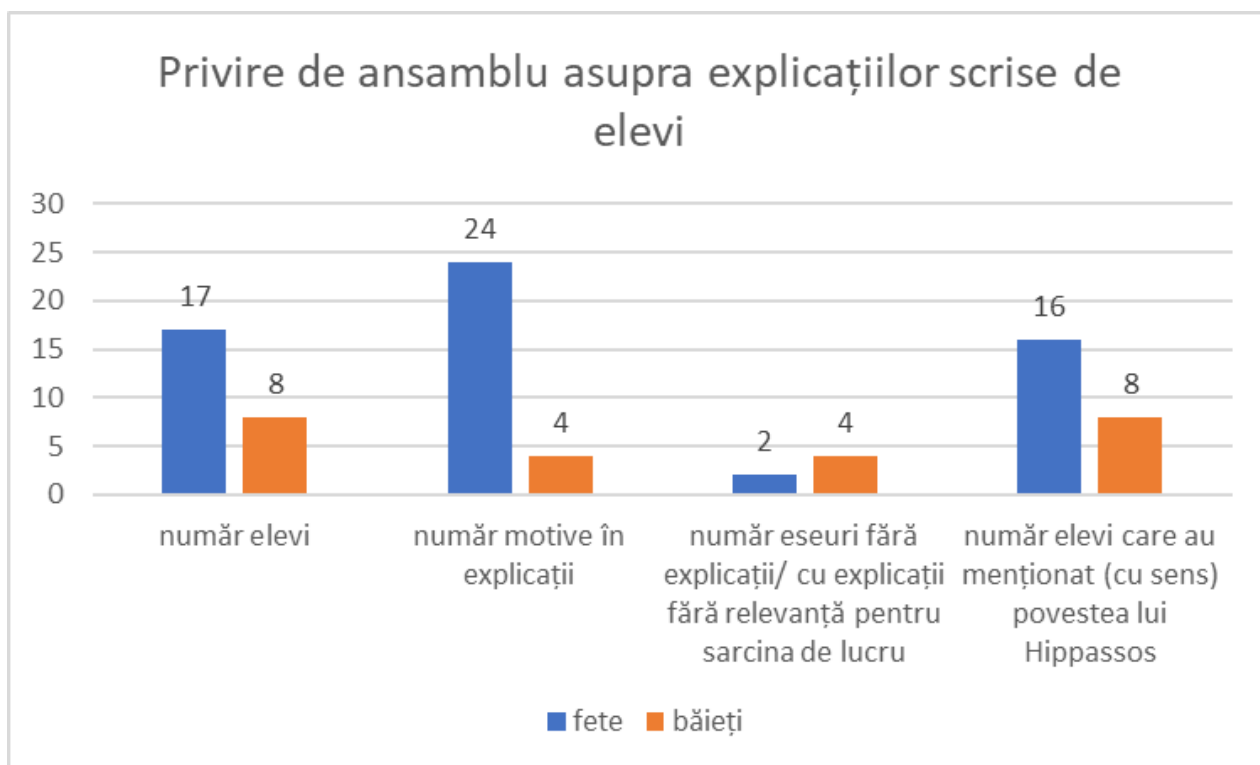
Citiți întreg capitolul 3 **Cu ce se ocupă matematica** din cartea *Numerele naturii- Ireală realitate a imaginației matematice* scrisă de Ian Stewart.

REFLECȚIILE PROFESORULUI

Lección a oferit elevilor o experiență de învățare bogată atât din perspectiva învățării matematicii, cât și din perspectivă culturală. Vorbind despre numere dintr-o perspectivă istorică a „umanizat” matematica. Elevii

au înțeles că matematica a fost descoperită de oameni pentru a-i sprijini în activitățile zilnice/ în munca pe care o desfășoară.

Am citit cu atenție varianta revizuită a eseului de 5 minute scris de fiecare elev și am oferit feedback individualizat. Cele 17 eleve din clasă au inclus în explicațiile lor 24 motive care pot justifica supărarea grecilor antici, 16 dintre ele au menționat povestea lui Hippassos, Pitagora și/sau Școala lui Pitagora, în timp ce toți cei 8 băieți au menționat povestea lui Hippassos și au scris fiecare câte o explicație. Două dintre eleve și patru dintre băieți au scris un text care fie rezumă povestea lui Hippassos și nu are nicio legătură cu descoperirea rădăcinii pătrate a lui 2, fie nu are nimic de-a face cu sarcina de lucru.



Imaginea 1 - Privire de ansamblu asupra explicațiilor scrise de elevi

Elevii au explicat tristețea/supărarea grecilor antici atunci când au descoperit rădăcina pătrată a lui doi, asociind descoperirea numerelor iraționale cu suferința eșecului sau cea de a fi umilit public (14 motive), pierderea valorilor (5 motive), lipsa de sens a muncii lor – rezultatele matematice pe care s-a bazat munca lor nefiind valide (2 motive), pierderea supremației în domeniul descoperirilor matematicii (1 motiv), neputință (1 motiv), nemulțumire (1 motiv), frustrare (1 motiv).

Dacă credeți că totul este construit din numere întregi, este un șoc teribil să descoperiți că un număr din lumea reală precum diagonala unui pătrat cu latura de lungime 1, care nu se potrivește cu imaginea voastră despre lume. Este un coșmar - unul din care pitagoreicii nu s-au mai recuperat niciodată. (Anca¹)

Motivul pentru care grecii antici erau triști în legătură cu descoperirea faptului că radicalul din 2 nu poate fi reprezentat exact printr-o fracție este că, odată cu aceasta, toate principiile lor, care aveau la bază această idee, s-au dovedit a fi greșite. De asemenea, și faptul că Pitagora deja făcuse cunoscută lumii

¹ Nu am folosit numele real al elevilor din clasă.

informația respectivă a reprezentat un motiv de tristețe pentru ei, nedorind să se înjosească după ce au susținut vehement descoperirea. (Diana)

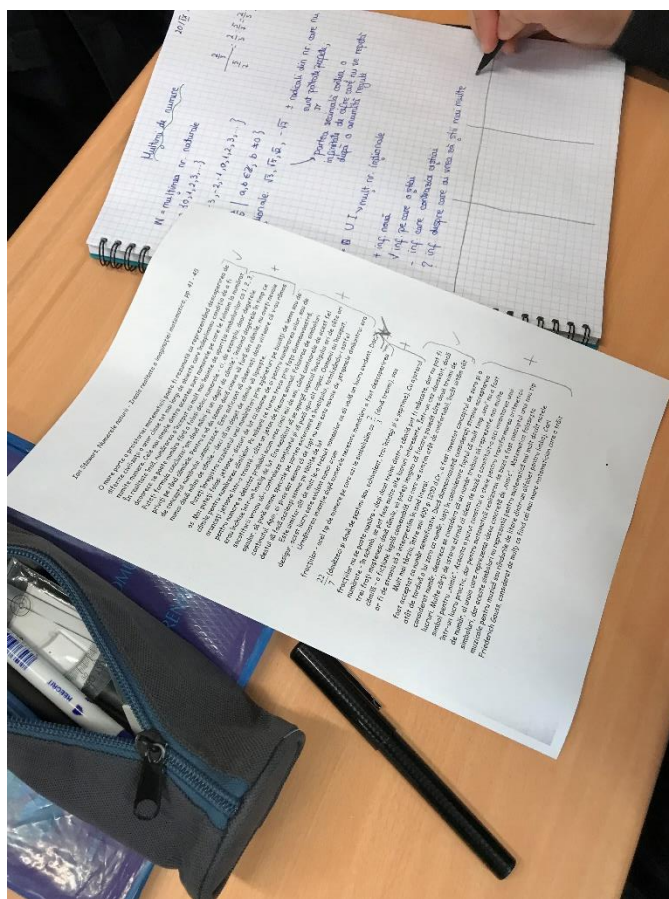
Lecția în sine și tema de casă au fost un punct de plecare pentru căutare de noi informații, lectură de alte texte și învățare ulterioară. Elevii au căutat și au citit texte despre Pitagora și Școala lui Pitagora, unii dintre ei menționând teoria lui Pitagora despre ordinea lumii: „numărul guvernează universul” sau „totul este număr”. Una dintre eleve a explicat tristețea/ supărarea grecilor antici scriind despre faptul că Pitagora a fost prima persoană care a folosit cuvântul *kosmos* pentru univers, cuvântul semnificând prezența (în egală măsură a) ordinii și frumuseții. Au fost elevi care au inclus în explicația lor câteva informații despre pitagoricieni ca sectă sau cult religios și au evidențiat valorile/ idealurile acestora. Alți elevi au căutat informații despre proporția de aur – deoarece, în unele surse, au descoperit că proporția de aur este legată de Hippasos.

Eu cred ca grecii antici au fost triști deoarece pitagoreicii susțineau că toate numerele pot fi scrise ca raportul unor numere întregi. Conform unei relatări, Hippasos ar fi descoperit că raportul de aur este un număr care nu este nici întreg și nici raportul dintre 2 numere întregi (am căutat și am găsit că numărul de aur este $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, adică 1,6180339887...) ceea ce a stârnit o criză filozofică și a determinat pedepsirea lui Hippasos pentru că a divulgat secretul existenței numerelor iraționale. (Radu)

Textul pe care l-am ales a fost potrivit atât ca lungime, cât și din perspectiva conținutului. Pentru o lecție de 2 ore, a fost perfect. Totuși, între timp am găsit o carte – un roman – care ar putea fi utilă când vorbim despre mulțimi de numere. Este cartea lui Yoko Ogawa *Profesorul și menajera*, dar utilizarea acestei cărți ar însemna că elevii trebuie să o citească înainte de lecție – ceea ce este greu de realizat la începutul clasei a IX-a. Mă gândesc să le cer elevilor să o citească în vacanța de vară și să o folosim într-o lecție introductivă la unitatea de învățare „Mulțimi de numere”.

Mi-a plăcut mult lecția și impresia pe care am avut-o la finalul lecției a fost că și elevilor le-a plăcut; elevii s-au implicat în discuții, au adresat multe întrebări, voiau să știe mai multe. A fost o atmosferă de lucru foarte plăcută.

Lecția a contribuit la dezvoltarea competențelor specifice vizate, a oferit elevilor ocazia de a învăța să folosească o strategie de lectură care îi menține implicați în timpul citirii unui text și pe care o pot utiliza atunci când învață la orice materie și i-a sprijinit să fie parte a unei experiențe matematice bogate din punct de vedere cultural.



Imaginea 2 - Elevă utilizând SINELG pentru lectura textului

Am mai utilizat texte autentice în timpul lecțiilor de matematică. Noutatea pe care a adus-o această lecție constă în implicarea elevilor în învățarea matematică, literație disciplinară și învățare socio-emoțională în cadrul unei singure lecții.

ANEXE

Anexa 1 - Ian Stewart, Numerele naturii - Ireală realitate a imaginației matematice, pp. 41 – 45 (Editura Humanitas 1999)

O mare parte a preistoriei matematicii poate fi rezumată ca reprezentând descoperirea de diferite civilizații a unor clase tot mai largi de obiecte care îndeplineau condiția de a fi numite numere. Cele mai simple dintre acestea sunt numerele pe care le folosim la numărare. În realitate însă, numărarea a început cu mult mai înainte de apariția simbolurilor ca 1, 2, 3, deoarece se poate număra fără a folosi deloc numerele – ci, de exemplu, doar degetele. Puteți formula concluzia: „am două mâini și un deget de cămile”, îndoind degetele în timp ce priviți pe rând cămilele. Pentru a vă da seama dacă cineva vă fură din cămile, nu aveți nevoie de conceptul numărului „unsprezece”. Este suficient să observați data viitoare că v-au rămas numai două mâini de cămile – deci că un deget de cămile vă lipsește.

Puteți înregistra rezultatul unei numărări prin zgârieturi pe bucăți de lemn sau de os. Mai puteți folosi jetoane – discuri de lut cu desene de oi pentru numărarea oilor, sau de cămile pentru numărarea cămilelor. Pe măsură ce turma trece prin fața dumneavoastră, aruncați jetoane într-o traistă – câte un jeton de fiecare animal. Folosirea de simboluri pentru numere a debutat probabil acum vreo cinci mii de ani, când contoarele de acest fel erau închise într-un înveliș de lut. Era neplăcut să se spargă capacul învelișului ori de câte ori socotitorii voiau să-i controleze conținutul și să pună apoi alt capac. Oamenii au început, așadar, să pună semne speciale pe partea exterioară a învelișului, totalizându-i astfel conținutul. Apoi, ei și-au dat seama că de fapt nu mai este nevoie de jetoanele dinăuntru: era destul să facă aceleași semne pe tăblițe de lut.

Este uimitor cât de mult le-a trebuit oamenilor ca să vadă un lucru evident. Dar, desigur, acest lucru este evident numai *acum*.

Următoarea invenție după numerele necesare numărării a fost descoperirea fracțiilor – acel tip de numere pe care azi le simbolizăm ca $\frac{2}{3}$ (două treimi), sau $\frac{22}{7}$ (douăzeci și două de șeptimi sau, echivalent, trei întregi și o șeptime). Cu ajutorul fracțiilor nu se poate număra – deși două treimi dintr-o cămilă pot fi mâncate, dar nu pot fi numărate – în schimb, se pot face multe alte lucruri interesante. Într-un caz deosebit, dacă trei frați moștenesc două cămile, vă puteți imagina că fiecare posedă câte două treimi de cămilă – o ficțiune legală convenabilă, cu care ne simțim atât de confortabil, încât uităm cât ar fi de straniu să o interpretăm în mod literal.

Mult mai târziu, între anii 400 și 1200 d. Cr., a fost inventat conceptul de zero și a fost acceptat ca număr semnificativ. Dacă dumneavoastră considerați stranie acceptarea atât de tardivă a lui zero ca număr, luați în considerare faptul că mult timp „unu” nu a fost considerat număr, deoarece se considera că un număr trebuie să reprezinte mai multe lucruri. Multe cărți de istorie afirmă că ideea de bază a constituit-o aici inventarea unui simbol pentru „nimic”. Aceasta a putut constitui o cheie pentru transformarea aritmeticii

Într-un lucru practic, dar pentru matematică realizarea de bază a fost conceptul unui nou tip de număr, al unuia care *reprezenta* ideea concretă de „nimic”. Matematica folosește simboluri, dar aceste simboluri nu reprezintă pentru matematică mai mult decât notele muzicale pentru muzică sau rândurile de litere dintr-un alfabet pentru limbaj. Carl Friederich Gauss, considerat de mulți ca fiind cel mai mare matematician care a trăit vreodată, a spus (în latină) că în matematică sunt importante „nu notațiile, ci noțiunile”. Calamburul „non notationes, sed notiones” funcționa și în latină.

Următoarea extindere a conceptului de număr a fost inventarea numerelor negative. Este iarăși lipsit de sens să-ți reprezinti minus două cămile în sens literal, dar dacă datorezi cuiva două cămile, numărul de cămile pe care le posezi este efectiv micșorat cu două animale de acest fel. Așadar, numărul negativ poate fi conceput ca reprezentând o datorie. Există multe moduri diferite de a interpreta tipul acesta ezoteric de numere; de exemplu, o temperatură negativă (în grade Celsius) caracterizează un corp mai rece decât punctul de îngheț al apei, iar un corp cu viteză negativă este unul care se mișcă de-a-ndărătelea. Astfel, un singur obiect matematic poate reprezenta mai mult decât un singur aspect al naturii.

Fracțiile reprezintă tot ceea ce este necesar pentru tranzacțiile comerciale, dar ele nu sunt suficiente pentru matematică. Grecii antici, de pildă, au descoperit, spre marea lor tristețe, că radicalul din 2 nu poate fi reprezentat exact printr-o fracție. Adică, multiplicând o fracție prin ea însăși, nu veți obține exact doi. Veți putea ajunge foarte aproape – de exemplu, pătratul lui $\frac{17}{12}$ este $\frac{289}{144}$, dar numai dacă ar fi $\frac{288}{144}$ ați obține doi. Dar nu este așa, iar dumneavoastră nu ați obținut doi, și nu veți obține niciodată, oricât vă veți strădui. Rădăcina pătrată a lui 2, notată de obicei $\sqrt{2}$, a fost din acest motiv numită „irațională”. Cea mai simplă cale de a lărgi sistemul numerelor pentru includerea iraționalelor este folosirea numerelor așa-zis reale – un nume năucitor de neadecvat, în măsura în care aceste numere sunt reprezentate cu ajutorul zecimalelor care merg la nesfârșit, așa ca 3,14159..., unde punctele indică un număr infinit de cifre. Cum pot fi reale niște numere care nici nu le poți scrie complet? Dar numele a prins probabil datorită faptului că numerele reale întrupează multe dintre intuițiile noastre vizuale despre lungimi și distanțe.

Numerele reale reprezintă una dintre cele mai îndrăznețe idealizări efectuate de intelectul uman și au fost folosite cu succes secole de-a rândul, înainte ca vreun om să se preocupe de logica din spatele lor. În mod paradoxal, oamenii s-au agitat mult pentru următoarea extindere a sistemului de numere, ba chiar au considerat-o pe de-a-ntregul inofensivă. Noua extindere a inclus rădăcina pătrată a numerelor negative și a dus la numerele „imaginare” sau „complexe”. (...)

În terminologia curentă, numerele întregi 0, 1, 2, 3, ... sunt cunoscute sub numele de numere naturale. Dacă includem și numerele întregi negative, obținem numerele întregi. Fracțiile pozitive și negative se numesc numere raționale. Numerele reale sunt cele mai generale, iar cele complexe au un grad de generalitate și mai mare. Obținem astfel cinci sisteme de numere, fiecare mai cuprinzător decât precedentul: numerele naturale, cele întregi, numerele raționale, numerele reale și numerele complexe. (...)

Sper ca dumneavoastră să înțelegeți de acum încolo că noțiunea de „număr” nu are nici un sens imuabil dat de Dumnezeu. Sfera de cuprindere a acestui cuvânt a fost extinsă nu numai o dată, iar acest proces poate, în principiu să se repete în orice moment.

Anexa 2 – Instrucțiuni de lucru pentru elevi - metoda SINELG

Citește textul cu atenție.

Pe parcursul lecturării textului trebuie să notezi pe marginea lui niște semne ce au o anumită semnificație:

- ✓ dacă ceva din ce ai citit confirmă ceea ce știai sau credeai că știi;
- dacă o anumită informație pe care ai citit-o contrazice sau diferă de ceea ce știai sau credeai că știi;
- + dacă o informație pe care ai întâlnit-o este nouă pentru tine;
- ? dacă găsești informații care ți se par confuze sau dacă dorești să știi mai multe despre un anumit lucru.

Reflectează asupra celor citite. Desenează în caiet tabelul de mai jos completează-l rezumând ideile din paragrafele marcate cu semnele de pe coloanele tabelului.

✓	+	-	?